Buenos días chicos:

Espero que vuestro encierro vaya bien y que no estéis muy aburridos, para hacéroslo más ameno os envío este enlace donde hay videos del último tema, el de Geometría, también hay ejercicios y teoría; no solo hay de este tema sino de todo el temario por si lo queréis usar para preparar recuperaciones o exámenes de trigonometría para 4º B. Os subo también una relación de ejercicios realizados paso a paso por si os sirve. Mirad la página de prácticamente todos los días por si voy subiendo cosas que os puedan ayudar en la tarea diaria, así como ejercicios de repaso de recuperaciones pendientes.

¡¡¡¡¡ANIMO QUE YA QUEDA MENOS!!!!!!!!

https://www.matematicasonline.es/cuarto-eso/mat4eso8b.html

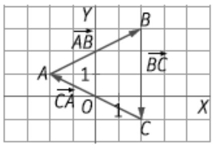
Solucionario de los dos primeros puntos del Tema 7:

1. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB} = (4, 2)$

$\overrightarrow{BC} = (0, -4)$

$\overrightarrow{CA} = (-4, 2)$



3. Las coordenadas de un punto P son (1, 3), y las del vector $\overrightarrow{PQ}$, (–2, –2). Calcula las coordenadas de Q y de $\overrightarrow{QP}$.

$Q = (1, 3) + (-2, -2) = (-1, 1)$ y $\overrightarrow{QP} = (1 + 1, 3 - 1) = (2, 2)$

4. Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ en cada caso.

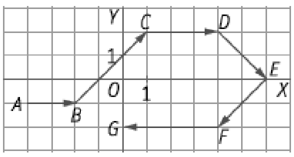
a) Origen $A(-1, 0)$ y extremo $B(3, 5)$

b) Origen $A(7, -4)$ y extremo $B(-2, 3)$

a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2-7)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{130}$

5. Identifica los vectores equipolentes de la imagen y los vectores libres que determinan.



No hay vectores equipolentes porque todos los vectores tienen distinto módulo, dirección o sentido.

6. Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A(5, -3)$ y $B(1, -1)$

b) $C(-2, 3)$ y $D(-1, -4)$

a) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-5)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{5}$

b) $d(C, D) = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-1+2)^2 + (-4-3)^2} = 5\sqrt{2}$

7. Los vértices de un triángulo son $A(3, 5)$, $B(10, 0)$ y $C(4, -1)$.

a) Calcula los vectores de forman cada lado.

b) Halla la longitud de cada lado.

a) $\overrightarrow{AB} = (10 - 3, 0 - 5) = (7, -5)$

$\overrightarrow{BC} = (4 - 10, -1 - 0) = (-6, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (4 - 3, -1 - 5) = (1, -6)$

b) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$

$d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$

$d(C, A) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$

8. Si $\vec{u}$ = (–3, 2), $\vec{v}$ = (1, 2) y $\vec{w}$ = (0, 3), realiza las operaciones.

a) $\vec{u}+\vec{v}$

b) $5\vec{u}+\vec{w}$

c) $\vec{v}+\vec{w}$

d) $3\vec{w}+2\vec{v}$

a) $\vec{u}+\vec{v} = (-3+1, 2+2) = (-2, 4)$

b) $5\vec{u}+\vec{w} = (-15, 10) + (0, 3) = (-15, 13)$

c) $\vec{v}+\vec{w} = (1+0, 2+3) = (1, 5)$

d) $3\vec{w}+2\vec{v} = (0, 9) + (2, 4) = (2, 13)$

9. Dados los vectores $\vec{u}$ = (4, 2), $\vec{v}$ = (–6, 3) y $\vec{w}$ = (2, 0), indica si son linealmente dependientes.

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **b)** $\vec{u}$ y $\vec{w}$ **c)** $\vec{v}$ y $\vec{w}$

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes porque no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.

b) $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes porque no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k \cdot \vec{w}$.

c) $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes porque no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.

11. Comprueba si los puntos *A*(–2, 3), *B*(–2, 1) y *C*(–5, 5) están alineados.

Para que *A*, *B* y *C* estén alineados debe verificarse que los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ sean proporcionales. Por tanto:

$$\left.\begin{matrix}\overline{AB}=(-2+2,1-3)=(0,-2)\\ \overline{AC}=(-5+2,5-3)=(-3,2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{0}{-3} \neq \frac{-2}{2} \Rightarrow \text{ Los puntos } A, B \text{ y } C \text{ no están alineados.}$$

13. Dado el segmento de extremos *A*(2, –5) y *B*(10, –1), halla los puntos *P*, *Q* y *R* que dividen *AB* en cuatro partes iguales.

Si se considera el vector $\overline{AB} = (10-2, -1+5) = (8, 4)$, se observa que: $\overline{AP} = \frac{1}{4}\overline{AB} = \left(\frac{8}{4}, \frac{4}{4}\right) = (2, 1)$ y, por tanto:

$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = (2, -5) + (2, 1) = (4, -4) \Rightarrow P(4, -4)$

$\overline{OQ} = \overline{OA} + 2\overline{AP} = (2, -5) + 2(2, 1) = (6, -3) \Rightarrow Q(6, -3)$

$\overline{OR} = \overline{OA} + 3\overline{AP} = (2, -5) + 3(2, 1) = (8, -2) \Rightarrow R(8, -2)$

15. Dados los vectores $\vec{u}$ = (–2, 2) y $\vec{v}$ = (–1, 3), calcula su producto escalar, sus módulos y el ángulo que forman.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\ (-1) + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{8}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = 0{,}894 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } 0{,}894 = 26^\circ\ 37'\ 11''$

17. Calcula el valor de *m* para que los vectores $\vec{u}$ = (*m*, 2*m* – 1) y $\vec{v}$ = (1 – *m*, *m*):

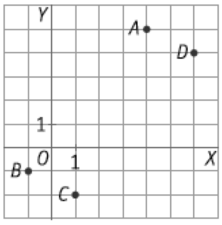
a) **Sean perpendiculares.** **b)** **Tengan un módulo de 1.**

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = m \cdot (1-m) + (2m-1) \cdot m = m - m^2 + 2m^2 - m = m^2 = 0 \Rightarrow m = 0.$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{m^2+(2m-1)^2} = \sqrt{m^2+4m^2+1-4m} = \sqrt{5m^2-4m+1} = 1 \Rightarrow 5m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ o } m = \frac{4}{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(1-m)^2+m^2} = \sqrt{1+m^2-2m+m^2} = \sqrt{2m^2-2m+1} = 1 \Rightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ o } m = 1$

38. Dados los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. ¿Cuáles de ellos son equipolentes?



$\overline{BA} = (4 + 1, 5 + 1) = (5, 6)$

$\overline{CD} = (6 - 1, 4 + 2) = (5, 6)$

$\overline{BC} = (1 + 1, -2 + 1) = (2, -1)$

$\overline{AD} = (6 - 4, 4 - 5) = (2, -1)$

Son equipolentes $\overline{BA}$ con $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ con $\overline{AD}$.

43. Calcula el valor o los valores de *m* para que *A*, *B* y *C* estén alineados.

a) $A(5, 0)$, $B(2, 4)$, $C(m, 8)$

b) $A(-2, 2)$, $B(m, m - 1)$, $C(0, -6)$

c) $A(4, -5)$, $B(m, -4)$, $C(2, -m)$

Para que *A*, *B* y *C* estén alineados debe verificarse que los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ sean proporcionales. Por tanto:

a) $\overline{AB} = (-3, 4)$ y $\overline{AC} = (m - 5, 8)$

$$\frac{m-5}{-3} = \frac{8}{4} \Rightarrow \frac{m-5}{-3} = 2 \Rightarrow m - 5 = -6 \Rightarrow m = -1$$

b) $\overline{AB} = (m + 2, m - 3)$ y $\overline{AC} = (2, -8)$

$$\frac{2}{m+2} = \frac{-8}{m-3} \Rightarrow 2m - 6 = -8m - 16 \Rightarrow 10m = -10 \Rightarrow m = -1$$

c) $\overline{AB} = (m - 4, 1)$ y $\overline{AC} = (-2, -m + 5)$

$$\frac{-2}{m-4} = \frac{-m+5}{1} \Rightarrow -2 = (m-4)(-m+5) \Rightarrow -2 = -m^2 + 9m - 20 \Rightarrow m^2 - 9m + 18 = 0 \Rightarrow m = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}$$

39. Calcula las coordenadas del punto *A* y el módulo del vector $\overrightarrow{AB} = (5, 3)$ si el punto *B* es $(-1, 4)$.

$A = (-1 - 5, 4 - 3) = (-6, 1)$ y $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

40. Calcula la distancia entre los puntos.

a) $A(4, -2)$ y $B(0, 9)$

b) $C(-1, 10)$ y $D(8, -5)$

a) $d(A, B) = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(0-4)^2 + (9+2)^2} = \sqrt{137}$

b) $d(C, D) = \left|\overline{CD}\right| = \sqrt{(8+1)^2 + (-5-10)^2} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$

41. Calcula los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* que dividen el segmento de extremos $A(-2, 6)$ y $B(13, -4)$ en cinco partes iguales.

Si se considera el vector $\overline{AB} = (13 + 2, -4 - 6) = (15, -10)$, se observa que: $\overline{AP} = \frac{1}{5}\overline{AB} = \left(\frac{15}{5}, \frac{-10}{5}\right) = (3, -2)$ y, por tanto:

$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = (-2, 6) + (3, -2) = (1, 4) \Rightarrow P(1, 4)$

$\overline{OQ} = \overline{OA} + 2\overline{AP} = (-2, 6) + 2(3, -2) = (4, 2) \Rightarrow Q(4, 2)$

$\overline{OR} = \overline{OA} + 3\overline{AP} = (-2, 6) + 3(3, -2) = (7, 0) \Rightarrow R(7, 0)$

$\overline{OS} = \overline{OA} + 4\overline{AP} = (-2, 6) + 4(3, -2) = (10, -2) \Rightarrow S(10, -2)$

44. Realiza estas operaciones con vectores.

a) $(2, -1) - (4, 3)$

b) $6(-3, 1) + (10, -2)$

c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2)$

d) $4(1, -1) + 2(3, 0)$

e) $(3, -1) - 5(1, -2)$

f) $(9, 6) - 2(4, 1)$

a) $(2, -1) - (4, 3) = (-2, -4)$

b) $6(-3, 1) + (10, -2) = (-8, 4)$

c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2) = (-5, -6)$

d) $4(1, -1) + 2(3, 0) = (10, -4)$

e) $(3, -1) - 5(1, -2) = (-2, 9)$

f) $(9, 6) - 2(4, 1) = (1, 4)$

45. **Dados los vectores $\vec{u}$ = (5, –3), $\vec{v}$ = (–1, 4) y $\vec{w}$ = (2, 2), calcula.**

a) $\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$

b) $3\vec{u}-2(\vec{w}-\vec{v})$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{u})$

d) $5\vec{w}-3\vec{v}+\vec{u}$

e) $2(\vec{w}+\vec{v})-\vec{u}$

f) $\frac{3}{4}\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$

a) $\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$ = (5, –3) – (1, 6) = (4, –9)

b) $3\vec{u}-2(\vec{w}-\vec{v})$ = (15, –9) – (6, –4) = (9, –5)

c) $\frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{u}) = \frac{1}{2}(-6,7) = \left(-3,\frac{7}{2}\right)$

d) $5\vec{w}-3\vec{v}+\vec{u}$ = (10, 10) – (–3, 12) + (5, –3) = (18, –5)

e) $2(\vec{w}+\vec{v})-\vec{u}$ = 2(1, 6) – (5, –3) = (–3, 15)

f) $\frac{3}{4}\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w} = \left(\frac{15}{4},-\frac{9}{4}\right)$ – (–2, 8) + (2, 2) = $\left(\frac{31}{4},-\frac{33}{4}\right)$

48. **Estudia si los vectores $\vec{u}$ = (2, –4), $\vec{v}$ = (3, 1) y $\vec{w}$ = (11, –15) son linealmente dependientes.**

Los vectores son linealmente dependientes porque (11, –15) = 4(2, –4) + (3, 1). Es decir, $\vec{w}=4\vec{u}+\vec{v}$.

52. **Calcula el punto simétrico de:**

a) ***A*(–3, 7) respecto del punto *P*(0, –3).**

b) ***A*(3, 1) respecto del punto *P*(2, 2).**

c) $A\left(\frac{3}{2},1\right)$ **respecto del punto** $P\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$.

Llamamos *A´*(*a*, *b*) al simétrico de A respecto *P*.

a) $0=\frac{-3+a}{2}, -3=\frac{7+b}{2} \Rightarrow a=3, b=-13 \Rightarrow A'(3,-13)$

b) $2=\frac{3+a}{2}, 2=\frac{1+b}{2} \Rightarrow a=1, b=3 \Rightarrow A'(1,3)$

c) $-\frac{2}{3}=\frac{\frac{3}{2}+a}{2}, \frac{1}{2}=\frac{1+b}{2} \Rightarrow a=-\frac{17}{6}, b=0 \Rightarrow A'\left(-\frac{17}{6},0\right)$

55. **Estudia si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares entre sí.**

a) $\vec{u}$ **= (6, 9) y** $\vec{v}$ **= (–3, 2)**

b) $\vec{u}$ **= (2, 4) y** $\vec{v}$ **= (–8, –4)**

c) $\vec{u}$ **= (–3, 6) y** $\vec{v}$ **= (10, 5)**

d) $\vec{u}$ **= (–1, –2) y** $\vec{v}$ **= (4, 2)**

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 6 · (–3) + 9 · 2 = –18 + 18 = 0 ⇒ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí.

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 2 · (–8) + 4 · (–4) = –16 – 16 = –32 ≠ 0 ⇒ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares entre sí.

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = (–3) · 10 + 6 · 5 = –30 + 30 = 0 ⇒ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí.

d) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = (–1) · 4 + (–2) · 2 = –4 – 4 = –8 ≠ 0 ⇒ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares entre sí.

56. **Calcula el ángulo que forman los vectores.**

a) $\vec{u}$ **= (–2, –4) y** $\vec{v}$ **= (2, –1)**

b) $\vec{u}$ **= (3, 9) y** $\vec{v}$ **= (2, –1)**

c) $\vec{u}$ **=** $\left(2,\sqrt{3}\right)$ **y** $\vec{v}$ **=** $\left(\sqrt{3},1\right)$

a) $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{-2\cdot 2+(-4)\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } 0 = 90^\circ$

b) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{3\cdot 2+9\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+9^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{5}} = -0{,}14\ 142 \Rightarrow \alpha = \arccos -0{,}14\ 142 = 98^\circ\ 7'\ 44''$

c) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 1}{\sqrt{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{4}} = 0{,}98\ 198 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}98198 = 10^\circ\ 53'\ 37''$

59. Halla el valor de *a* para que los vectores $\vec{u}$ = (*a*, 3) y $\vec{v}$ = (–1, 5) sean perpendiculares.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = a\cdot(-1) + 3\cdot 5 = -a + 15 = 0 \Rightarrow a = 15$

60. Calcula el valor de *a* para que los vectores $\vec{u}$ = (4, 3) y $\vec{v}$ = (a, 1) formen un ángulo de 45º.

$\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{4a+3}{5\sqrt{a^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 8a+6 = 5\sqrt{2a^2+2} \Rightarrow 64a^2 + 96a + 36 = 50a^2 + 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow 14a^2 + 96a - 14 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-96\pm 100}{28} = \begin{cases} -7 \\ \dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7} \end{cases}$