TEMA 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Utiliza las identidades notables para desarrollar estas expresiones.

a) $(3x^2 - 5x^6)^2$

b) $(2x^5 + 4y^2)^2$

c) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})$

d) $\left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2$

a) $(3x^2 - 5x^6)^2 = 9x^4 - 30x^8 + 25x^{12}$

b) $(2x^5 + 4y^2)^2 = 4x^{10} + 16x^5y^2 + 16y^4$

c) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2x^2 - (\sqrt{3})^2 = 2x^2 - 3$

d) $\left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2 = 9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2$

Dados los polinomios: $P(x) = x^2 - 5x + 4$, $Q(x) = 3x^2 + 6x - 4$ y $R(x) = -2x^2 + x - 1$, realiza las operaciones indicadas.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $Q(x) - P(x)$

d) $P(x) + Q(x) + R(x)$

e) $P(x) - Q(x) + R(x)$

f) $P(x) - [Q(x) + R(x)]$

a) $P(x) + Q(x) = x^2 - 5x + 4 + 3x^2 + 6x - 4 = 4x^2 + x$

b) $P(x) - Q(x) = x^2 - 5x + 4 - 3x^2 - 6x + 4 = -2x^2 - 11x + 8$

c) $Q(x) - P(x) = 2x^2 + 11x - 8$

d) $P(x) + Q(x) + R(x) = 2x^2 + 2x - 1$

e) $P(x) + Q(x) + R(x) = -4x^2 - 10x + 7$

f) $P(x) - [Q(x) + R(x)] = -12x + 9$

Saca factor común en estas expresiones.

a) $3x^2 - 4x^3 + 7x^5$

b) $6x^4 - 12x^2 + 3x$

c) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x^6 + \frac{7}{4}x^5$

d) $12x^5y^3 - 6xy^4 + 4x^2y^2$

e) $-30x^2y + 21x^4 + 18y$

f) $\frac{3}{4}x^5 - \frac{3}{5}x^4 + \frac{3}{2}x$

a) $3x^2 - 4x^3 + 7x^5 = x^2(3 - 4x + 7x^3)$

b) $6x^4 - 12x^2 + 3x = 3x(2x^3 - 4x + 1)$

c) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x^6 + \frac{7}{4}x^3 = \frac{1}{4}x^2\,(3 - 5x^4 + 7x)$

d) $12x^5y^3 - 6xy^4 + 4x^2y^2 = 2xy^2(6x^4y - 3y^2 + 2x)$

e) $-30x^2y + 21x^4 + 18y = 3(-10x^2y + 7x^4 + 6y)$

f) $\frac{3}{4}x^5 - \frac{3}{5}x^4 + \frac{3}{2}x = 3x\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}\right)$

Realiza las siguientes operaciones utilizando las identidades notables.

a) $(2x + 3)^2$

b) $(3x - 1)^2$

c) $(x + 4)(x - 4)$

d) $(2x^5 - 6x^3)^2$

e) $(2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x)$

f) $(3x^2 + 5x)^2$

a) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

b) $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

c) $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$

d) $(2x^5 - 6x^3)^2 = 4x^{10} - 24x^8 + 36x^6$

e) $(2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x) = 4x^4 - 25x^2$

f) $(3x^2 + 5x)^2 = 9x^4 + 30x^3 + 25x^2$

Expresa cada polinomio como producto de dos factores utilizando las identidades notables.

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $16x^4 - 1$

c) $25x^6 + 4 - 20x^3$

d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{25}$

e) $81x^2 + 2x + \frac{1}{81}$

f) $-20x + x^2 + 100$

a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

b) $16x^4 - 1 = (4x^2 + 1)(4x^2 - 1)$

c) $25x^6 + 4 - 20x^3 = (5x^3 - 2)^2$

d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{25} = \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}\right)$

e) $81x^2 + 2x + \frac{1}{81} = \left(9x + \frac{1}{9}\right)^2$

f) $-20x + x^2 + 100 = (x - 10)^2$

Divide utilizando la regla de Ruffini.

a) $\dfrac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{x - 2}$

b) $\dfrac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{x + 2}$

c) $\dfrac{4x^5 - 3x^3 + x - 10}{x - 1}$

d) $\dfrac{4x^5 - 3x^3 + x - 10}{x + 1}$

a) Cociente: $3x^2 + x + 6$. Resto: 11

	3	−5	4	−1
2		6	2	12
	3	1	6	$\boxed{11}$

b) Cociente: $3x^2 - 11x + 26$. Resto: -53

	3	−5	4	−1
−2		−6	22	−52
	3	−11	26	$\boxed{-53}$

c) Cociente: $4x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 2$. Resto: -8

	4	0	−3	0	1	−10
1		4	4	1	1	2
	4	4	1	1	2	$\boxed{-8}$

d) Cociente: $4x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 2$. Resto: -12

	4	0	−3	0	1	−10
−1		−4	4	−1	1	−2
	4	−4	1	−1	2	$\boxed{-12}$

Halla el valor de k para que el resto de la división $\dfrac{3x^2 + kx - 5}{x - 2}$ sea 1.

Se hace la división mediante la regla de Ruffini.

	3	k	−5
2		6	$12 + 2k$
	3	$6 + k$	$\boxed{7 + 2k}$

Como $7 + 2k = 1$, el valor de k debe ser -3.

Halla en cada caso el valor de k para que la división sea exacta.

a) $\dfrac{3x^3 - 5x^2 + kx - 6}{x - 1}$

b) $\dfrac{kx^3 - x^2 + 3x + 4}{x + 2}$

a)

	3	−5	k	−6
1		3	−2	$k - 2$
	3	−2	$k - 2$	$k - 8$

Como $k - 8 = 0$, el valor de k debe ser 8.

b)

	k	−1	3	4
−2		$-2k$	$2 + 4k$	$-10 - 8k$
	k	$-1 - 2k$	$5 + 4k$	$\boxed{-6 - 8k}$

Como $-8k - 6 = 0$, el valor de k debe ser $\dfrac{-3}{4}$.

Halla el resto sin hacer la división.

a) $(3x^2 - 5x + 9) : (x - 2)$

b) $(x^{12} - 3x + 5) : (x - 1)$

c) $(3x^3 - 5x^2 + 2x - 50) : (x + 2)$

d) $(x^5 + 10x^4 - 3x - 1) : (x + 10)$

En todos los casos se aplica el teorema del resto.

a) $3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 9 = 11$

b) $1^{12} - 3 \cdot 1 + 5 = 3$

c) $3(-2)^3 - 5(-2)^2 + 2(-2) - 50 = -98$

d) $(-10)^5 + 10(-10)^4 - 3(-10) - 1 = 29$

Calcula el valor de *a* para que el resto de la división $(2x^3 + ax^2 + 5x - 10) : (x + 4)$ sea 6.

Por el teorema del resto, $2(-4)^3 + a(-4)^2 + 5(-4) - 10 = 6 \Rightarrow 16a = 164 \Rightarrow a = \frac{164}{16} = \frac{41}{4}$.

Calcula el valor de *a* para que el resto de la división $(x^2 + x - 10) : (x - a)$ sea 2.

Se aplica el teorema del resto. Hay que resolver la ecuación $\Rightarrow a^2 + a - 10 = 2 \Rightarrow a^2 + a - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \text{o} \\ a = -4 \end{cases}$

Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 20x$ e indica cuáles son sus raíces.

1.° En este caso se puede extraer factor común:

$$P(x) = 2x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 20x = 2x(x^3 - 6x^2 + 3x + 10)$$

2.° Se buscan las raíces enteras del polinomio resultante, $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$, que deben ser divisores de 10. Se hallan dividiendo por Ruffini y utilizamos la relación dividendo = divisor · cociente.

	1	−6	3	10
−1		−1	7	−10
	1	−7	10	0
2		2	−10	
	1	−5	0	

$x = -1$ es una raíz $\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x + 1)(x^2 - 7x - 10)$

$x = 2$ es una raíz $\Rightarrow x^2 - 7x - 10 = (x - 2)(x - 5)$

Por tanto $P(x) = 2x\,(x + 1)(x - 2)(x - 5)$

El polinomio tiene 4 raíces: $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$.

Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ **$Q(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$**

Se factorizan ambos polinomios.

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)^2(x - 3)$ $Q(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x - 1)(x + 1)(x + 4)$

m.c.d. $(P(x), Q(x)) = x - 1$

m.c.m. $(P(x), Q(x)) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 3)(x + 4)$

Calcula el resto de las siguientes divisiones.

a) $(3x^{10} - 4x^5 + 7) : (x - 1)$ **b) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2) : (x + 1)$**

a) Por el teorema del resto, se sustituye $x = 1$ en el dividendo: $3 \cdot 1^{10} - 4 \cdot 1^5 + 7 = 3 - 4 + 7 = 6$.

b) El resto es $(-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 0$.

FACTORIZACIÓN

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios irreducibles (que no se pueden seguir factorizando) de grado menor llamados **factores.**

En cada paso, se debe escribir el polinomio inicial como **producto de todos los factores encontrados.** De esta forma, un polinomio de grado n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con n raíces $x_1, x_{2,\ldots,} x_n$, quedaría descompuesto como:

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_0)$$

Para cada raíz calculada, $x = a$, tendremos un factor $(x - a)$. Ten en cuenta que un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces y, por tanto, n factores irreducibles.

Se finaliza la factorización cuando todos los factores sean de grado 1 o cuando no se pueda seguir factorizando.

La factorización de polinomios nos va a permitir:

— Simplificar fracciones algebraicas.

— Resolver ecuaciones y buscar sus raíces enteras.

Podemos utilizar las siguientes técnicas para factorizar un polinomio:

— **Sacar factor común** a la variable y/o a algún número (si el polinomio no tiene término independiente o sus coeficientes tienen algún divisor común).

— **Identificar las igualdades notables** (véase el recuadro al margen).

— **Calcular las raíces enteras** y factorizar el polinomio aplicando la **regla de Ruffini** y los **teoremas del resto** y **del factor.**

— **Calcular las raíces** a través de la **resolución de la ecuación** de forma clásica.

Las raíces de un polinomio pueden estar repetidas. Si una raíz solo aparece una vez, se trata de una raíz **simple;** si está repetida, se denomina raíz **doble,** raíz **triple,** etc., según el número de veces que se repita.

Factoriza estos polinomios e indica sus raíces.

a) $(x^2 - 1)(x^2 - 4x + 4)$

b) $(x - 7)(x^2 - 11x + 24)$

c) $3x^3 - 9x^2 + 6x$

d) $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$

e) $x^6 + 2x^5 - 13x^4 - 14x^3 + 24x^2$

a) $(x^2 - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)^2$. Raíces: -1, 1, 2 (doble).

b) $(x - 7)(x^2 - 11x + 24) = (x - 7)(x - 3)(x - 8)$. Raíces: 7, 3, 8.

c) $3x^3 - 9x^2 + 6x = 3x(x^2 - 3x + 2) = 3x(x - 1)(x - 2)$. Raíces: 0, 1, 2.

d) $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$. Raíces: 2, 3, 5.

e) $x^6 + 2x^5 - 13x^4 - 14x^3 + 24x^2 = x^2(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)$. Raíces: 0 (doble), 1, -2, 3, -4.

Simplifica estas fracciones.

a) $\dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 10x + 25}$

b) $\dfrac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x^2 - 2x - 3}$

a) $\dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 10x + 25} = \dfrac{x(x - 5)}{(x - 5)^2} = \dfrac{x}{x - 5}$

b) $\dfrac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{x(x - 3)(x - 4)}{(x + 1)(x - 3)} = \dfrac{x(x - 4)}{x + 1}$

Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x(x - 3)}{x^2 - 6x + 9}$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 6}$

a) $\dfrac{x(x - 3)}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{x(x - 3)}{(x - 3)^2} = \dfrac{x}{x - 3}$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 6} = \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 2)(x - 3)} = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

Efectúa las operaciones indicadas.

a) $\dfrac{3x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{10x + 3x^2}{x - 2}$

b) $\dfrac{x(x^2 - 1)}{(x^3 - 4)} \cdot \dfrac{x - 2}{x^2 - x}$

a) $\dfrac{3x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{10x + 3x^2}{x - 2} = \dfrac{(3x^2 - 5x)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} - \dfrac{(10x + 3x^2)(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} = \dfrac{3x^3 - 11x^2 + 10x - 3x^3 - 13x^2 - 10x}{(x - 1)(x - 2)} = \dfrac{-24x^2}{(x + 1)(x - 2)}$

b) $\dfrac{x(x^2 - 1)}{(x^2 - 4)} \cdot \dfrac{x - 2}{x^2 - x} = \dfrac{x(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)x(x - 1)} = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

Opera y simplifica.

a) $\frac{x-1}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+1}$

b) $\frac{2x}{3x^2-5x} \cdot \frac{6x+10}{4x^2}$

c) $\frac{x(x+3)^2}{(x+1)^3} : \frac{(x+3)x^2}{(x^2-1)(x+1)}$

d) $\frac{3x^2-2x}{x^2-4} : \frac{2-3x}{(x+2)(x-2)}$

a) $\frac{x-1}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+3)(x-3)(x-1)^2} = \frac{x+3}{(x-3)(x-1)}$

b) $\frac{2x}{3x^2-5x} \cdot \frac{6x+10}{4x^2} = \frac{2x \cdot 2 \cdot (3x+5)}{x(3x-5) \cdot 4x^2} = \frac{3x+5}{x^2(3x-5)}$

c) $\frac{x(x+3)^2}{(x+1)^3} : \frac{(x+3)x^2}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{x(x+3)^2(x+1)(x-1)(x+1)}{(x+1)^3(x+3)x^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)x}$

d) $\frac{3x^2-2x}{x^2-4} : \frac{2-3x}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(3x-2)(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)(2-3x)} = \frac{x(3x-2)}{-(3x-2)} = -x$

Opera y simplifica.

a) $\frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+3} - \frac{11}{x^2-9}$

b) $\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{1-x}$

c) $\frac{3(x-2)}{x^2-16} + \frac{2x}{x^2-8x+16}$

d) $\frac{2x}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{x-2}$

a) $\frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+3} - \frac{11}{x^2-9} = \frac{2(x+3)-2(x-3)-11}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{(x+3)(x-3)}$

b) $\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2+x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(2x+1)}{(x+1)(x-1)}$

c) $\frac{3(x-2)}{x^2-16} + \frac{2x}{x^2-8x+16} = \frac{3(x-2)}{(x+4)(x-4)} + \frac{2x}{(x-4)^2} = \frac{3(x-2)(x-4)+2x(x+4)}{(x+4)(x-4)^2} = \frac{5x^2-10x+24}{(x+4)(x-4)^2}$

d) $\frac{2x}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{x-2} = \frac{2x-2(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x-2x+2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{(x-1)(x-2)}$

> Descompón en fracciones simples:

a) $\frac{2}{1-x^2}$;

b) $\frac{2x}{x^2+x-2}$

a) El denominador se puede escribir como $(1-x)\ (1+x)$, luego:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = $$
$$= \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2}$$

Como la primera y la última fracción son iguales, se tendrá que: $2 = A(1+x) + B(1-x)$.

Luego:

si $x = 1$: $\quad 2 = 2A \Rightarrow A = 1$

si $x = -1$: $\quad 2 = 2B \Rightarrow B = 1$

Con esto:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

b) Las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = 2$, luego puede escribirse:

$$\frac{2x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Igualando los numeradores:

$2x = A(x+2) + B(x-1)$

si $x = 1{:}2 = 3A \Rightarrow A = 2/3$

si $x = -2{:}-4 = -3B \Rightarrow B = 4/3$

Por tanto: $\frac{2x}{x^2+x-2} = \frac{2/3}{x-1} + \frac{4/3}{x+2}$.