

Unidad 5: Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ejercicio 1

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas (se deja el doble de espacio para que hagas las comprobaciones):

a) $2\log x - \log(x+6) = 0$ Al haber sólo dos logaritmos, intentaremos la operación de quitarlos; para ello, ponemos la ecuación en la forma: $\log A = \log B$

$\log x^2 = \log(x+6)$; quitando logaritmos: $x^2 = x+6$; al resolver la ecuación de 2º grado se obtienen estos dos resultados: $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$.

No existen los logaritmos de números negativos, por tanto, ignoramos la primera de las soluciones. $x = 3$

b) $\log(x+1) - \log x = 1$ $\log \frac{(x+1)}{x} = \log 10$; $x = \frac{1}{9}$

c) $\log(x+6) = 1 + \log(x-3)$ $\log(x+6) = \log 10(x-3)$; $x = 4$

d) $\log(3x+5) - \log(2x+1) = 1 - \log 5$ $\log \frac{3x+5}{2x+1} = \log \frac{10}{5}$; $x = 3$

e) $\log(x-1) - \log \sqrt{5+x} - \log \sqrt{5-x} = 0$; evitamos el problema de las dos restas poniendo un paréntesis y cambiando el signo del segundo logaritmo:

$$\log(x-1) - (\log \sqrt{5+x} + \log \sqrt{5-x}) = 0; \log(x-1) - \log(\sqrt{5+x} \cdot \sqrt{5-x}) = 0$$

$$\log(x-1) - \log(\sqrt{25-x^2}) = 0; \log(x-1) = \log(\sqrt{25-x^2}); x-1 = \sqrt{25-x^2};$$

$$x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2; 2x^2 - 2x - 24 = 0; x^2 - x - 12 = 0;$$

soluciones: $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$; la única solución válida es: $x = 4$

(Sigue →)

(Continuación)

$$f) \log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x) \quad \log[2(11 - x^2)] = \log(5 - x)^2;$$

$$22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{3}; \quad x_2 = 3$$

$$g) \log(3 - x^2) = \log 2 + \log x$$

$$3 - x^2 = 2x; \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = -3; x_2 = 1; \text{ Válida: } x = 1$$

$$h) 2\log x - \log(x^2 - 6) = 1$$

$$\frac{x^2}{x^2 - 6} = 10; \quad 9x^2 - 60 = 0; \quad x = +\sqrt{\frac{20}{3}}$$

Hacer la COMPROBACIÓN

$$2\log \sqrt{\frac{20}{3}} - \log\left(\frac{20}{3} - 6\right) = 1; \quad 2\log\left(\frac{20}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \log\left(\frac{20-18}{3}\right) = 1;$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \log \frac{20}{3} - \log \frac{2}{3} = 1; \quad \log 20 - \log 3 - \log 2 + \log 3 = 1; \quad \log 20 - \log 2 = 1;$$

$$\log(10 \cdot 2) - \log 2 = 1; \quad \log 10 + \log 2 - \log 2 = 1; \quad \log 10 = 1 \text{ evidente.}$$

$$i) \log(5x + 4) - \log 2 = \frac{1}{2} \log(x + 4); \text{ Aplicamos propiedades de los logaritmos:}$$

$$\frac{5x + 4}{2} = \sqrt{x + 4}; \quad 25x^2 + 40x + 16 = 4x + 16; \quad 25x^2 + 36x = 0; \text{ cuyas soluciones son:}$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{36}{25}; \text{ Válida: } x_1 = 0$$

Hacer la COMPROBACIÓN

$$\log 4 - \log 2 = \frac{1}{2} \log 4; \quad \log \frac{4}{2} = \log 4^{\frac{1}{2}}; \quad \log 2 = \log \sqrt{4}; \text{ evidente.}$$

Ejercicio 2

Despeja en valor de x en $\log x - \log y = \log (x - y)$

$$\log \frac{x}{y} = \log (x - y); \quad \frac{x}{y} = x - y; \quad x = xy - y^2; \quad x - xy = -y^2; \quad x(1 - y) = -y^2$$

Solución: $x = \frac{y^2}{y-1}$

Ejercicio 3

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3 \cdot 5^x = 75$ (Ecuación 3 anterior) $5^x = 25; \quad x = 2$

b) $25^{2x-2} = 5$ $5^{2(2x-2)} = 5; \quad 5^{4x-4} = 5^1; \quad \text{por tanto: } 4x - 4 = 1; \quad x = \frac{5}{4}$

c) $7^{-3x-10} - 7^{5x+6} = 0$ $7^{-3x-10} = 7^{5x+6}; \quad \text{por tanto: } -3x - 10 = 5x + 6; \quad x = -2$

d) $32^{7x-11} = 4^{5x+10}$ $2^{35x-55} = 2^{10x+20}; \quad 35x - 55 = 10x + 20; \quad x = 3$

e) $25^{-2x-2} = 1$ $5^{-4x-4} = 5^0; \quad -4x - 4 = 0; \quad x = -1$

f) $27^{4x+9} = 81^{8x-7}$ $3^{12x+27} = 3^{32x-28}; \quad 12x + 27 = 32x - 28; \quad x = \frac{11}{4}$

g) $9^{-2x-2} - 1 = 0$ $9^{-2x-2} = 9^0; \quad -2x - 2 = 0; \quad x = -1$

Ejercicio 4

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x+1} + 2^x = 3$ $2^x(2+1) = 3$; $2^x = 1$; $2^x = 2^0$; $x = 0$

b) $3^{-x+1} + 3^{-x+2} = 324$ $3^{-x}(3+3^2) = 324$; $3^{-x}(12) = 324$;
 $3^{-x} = 27$; $3^{-x} = 3^3$; $x = -3$

c) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 120$ (Ecuación 6 anterior)
 $3^x \left(3^2 + 3 + 1 + \frac{1}{3} \right) = 120$; $3^x \left(\frac{39+1}{3} \right) = 120$;
 $3^x = \frac{120 \cdot 3}{40}$; $3^x = 3^2$; $x = 2$

d) $3^{3x-2} + 3^{3x} = 10$ $3^{3x} \left(3^{-2} + 1 \right) = 10$; $3^{3x} \left(\frac{1}{9} + 1 \right) = 10$;
 $3^{3x} \left(\frac{1+9}{9} \right) = 10$; $3^{3x} = \frac{10 \cdot 9}{10}$; $3x = 2$; $x = \frac{2}{3}$

e) $4^{-x-1} - 4^{-x-2} + 4^{-x-1} = 112$
 $4^{-x} \left(4^{-1} - 4^{-2} + 4^{-1} \right) = 112$; $4^{-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \right) = 112$
 $4^{-x} \left(\frac{8-1}{16} \right) = 112$; $4^{-x} = \frac{112 \cdot 16}{7}$; $4^{-x} = 256$; $4^{-x} = 4^4$; $x = -4$

Ejercicio 5

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ $5^{x^2} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$; Cambio: $5^x = t$;
 $t^2 - 6 \cdot t + 5 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 5$

Se deshace el cambio: para $t_1 = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Se deshace el cambio: para $t_2 = 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow x = 1$

(Sigue →)

(Continuación)

$$b) \quad 4^{2x} - 6 \cdot 2^{2x} + 8 = 0; \quad (2^2)^{2x} - 6 \cdot 2^{2x} + 8 = 0; \quad (2^{2x})^2 - 6 \cdot 2^{2x} + 8 = 0;$$

$$\text{Cambio: } \boxed{2^{2x} = t}; \quad t^2 - 6 \cdot t + 8 = 0; \quad \boxed{t_1 = 2; t_2 = 4}$$

$$\text{Se deshace el cambio: para } t_1 = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$\text{Se deshace el cambio: para } t_2 = 4 \Rightarrow 2^{2x} = 4 = 2^2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$c) \quad 7^{12x} - 8 \cdot 7^{6x} + 7 = 0 \quad 7^{(6x)^2} - 8 \cdot 7^{6x} + 7 = 0; \text{ Cambio: } \boxed{7^{6x} = t};$$

$$t^2 - 8 \cdot t + 7 = 0; \quad \boxed{t_1 = 1; t_2 = 7}$$

$$\text{Se deshace el cambio: para } t_1 = 1 \Rightarrow 7^{6x} = 1 = 7^0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\text{Se deshace el cambio: para } t_2 = 7 \Rightarrow 7^{6x} = 7 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{6}}$$

$$d) \quad 6^{4x+1} - 7 \cdot 6^{2x} + 1 = 0 \quad 6 \cdot 6^{(2x)^2} - 7 \cdot 6^{2x} + 1 = 0; \text{ Cambio: } \boxed{6^{2x} = t};$$

$$6t^2 - 7 \cdot t + 1 = 0; \quad \boxed{t_1 = \frac{1}{6}; t_2 = 1}$$

$$\text{Se deshace el cambio: para } t_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow 6^{2x} = 6^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

$$\text{Se deshace el cambio: para } t_2 = 1 \Rightarrow 6^{2x} = 1 = 6^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Ejercicio 6

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$a) \quad 5^x = 10 \quad (\text{Ecuación 5}) \quad \log_5 5^x = \log_5 10; \quad x \cdot \log_5 5 = \log_5 10$$

$$x = \log_5 10; \quad \boxed{x = 1'4307}$$

$$b) \quad 2^{5x+3} = 1000 \quad \log_2 2^{5x+3} = \log_2 10^3;$$

$$(5x+3) \log_2 2 = 3 \log_2 10; \quad 5x+3 = 3 \log_2 10$$

$$x = \frac{3 \log_2 10 - 3}{5}; \quad \boxed{x = 1'3932}$$

Ejercicio 7

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales (ahora no están incluidas en ningún apartado); deberás deducir cuál es el método de resolución que mejor se adecua a cada ecuación:

$$a) \quad 5^{-3x+1} + 5^{-3x} = 6$$

Sacamos factor común: $5^{-3x}(5+1) = 6$;

$$5^{-3x} = 1; \quad 5^{-3x} = 5^0; \quad -3x = 0; \quad \boxed{x = 0}$$

$$b) \quad 10^{\frac{3x-1}{2x+1}} = 100$$

Igualamos las bases: $10^{\frac{3x-1}{2x+1}} = 10^2$; $\frac{3x-1}{2x+1} = 2$

$$3x-1 = 2(2x+1); \quad 3x-1 = 4x+2; \quad \boxed{x = -3}$$

$$c) \quad 3^{2(x+1)} - 18 \cdot 3^x + 9 = 0$$

Se opera en el lado izquierdo:

$$3^{2x} \cdot 3^2 - 18 \cdot 3^x + 9 = 0; \quad 9(3^x)^2 - 18 \cdot 3^x + 9 = 0;$$

Cambio: $\boxed{3^x = t}$; $9t^2 - 18t + 9 = 0$;

$$\text{dividimos por 9: } t^2 - 2t + 1 = 0; \quad \boxed{t = 1}$$

Se deshace el cambio: para $t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 = 3^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$$d) \quad 5^{x^2-3x} = 800$$

$$\log_5 5^{x^2-3x} = \log_5 800; \quad (x^2 - 3x) \log_5 5 = \log_5 800$$

$$x^2 - 3x = \log_5 800; \quad x^2 - 3x - \log_5 800 = 0;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot \log_5 800}}{2} = \begin{cases} \boxed{x_1 = 4'0305} \\ \boxed{x_2 = -1'0305} \end{cases}$$

$$e) \quad 2^{-8x+2} - 3 \cdot 2^{-4x} - 1 = 0$$

$$4 \cdot 2^{(-4x)^2} - 3 \cdot 2^{-4x} - 1 = 0; \quad \text{Cambio: } \boxed{2^{-4x} = t};$$

$$4t^2 - 3t - 1 = 0; \quad \boxed{t_1 = \frac{-1}{4}; \quad t_2 = 1}$$

Se deshace el cambio: para $t_1 = \frac{-1}{4} \Rightarrow 2^{-4x} = \frac{-1}{4} \Rightarrow$

No hay solución: el resultado de una potencia de base positiva no puede ser negativo

Se deshace el cambio: para $t_2 = 1 \Rightarrow 2^{-4x} = 1 = 2^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

(Sigue →)

(Continuación)

$$f) \quad 0'4^{x-1} = 6'25^{6x-5} \quad \text{Igualamos las bases: } \left(\frac{4}{10}\right)^{x-1} = \left(\frac{625}{100}\right)^{6x-5};$$
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5^4}{2^2 \cdot 5^2}\right)^{6x-5}; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2(6x-5)}$$
$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2(6x-5)}; \quad -x+1 = 12x-10; \quad \boxed{x = \frac{11}{13}}$$

$$g) \quad 2^{2x+1} - 2^{2x+2} = -4 \quad \text{Sacamos factor común: } 2^{2x}(2 - 2^2) = -4;$$
$$2^{2x}(-2) = -4; \quad 2^{2x} = 2^1; \quad 2x = 1; \quad \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Ejercicio 8

Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 64 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 64 \\ x/y = 10 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 64 \\ x = 10y \end{array} \right\} e_2 \text{ en } e_1$$
$$3(10y) + 2y = 64; \quad 32y = 64; \quad \boxed{x = 20; y = 2}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} x - y = 9 \\ \log x + \log y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 9 \\ xy = 10 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 9 + y \\ xy = 10 \end{array} \right\} e_1 \text{ en } e_2 : (9 + y)y = 10$$
$$9y + y^2 = 10 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y_1 = 1; \quad x_1 = 10} \\ \boxed{y_2 = -10; \quad x_2 = -1} \end{array} \right.$$

Se descarta la segunda solución por no existir logaritmos de números negativos; por tanto: $\boxed{x = 10; \quad y = 1}$

$$c) \quad \left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\} \log x = 2 \rightarrow x = 100$$
$$2 \log x = 4$$

$$2 + \log y = 3; \quad \log y = 1; \quad \boxed{x = 100; \quad y = 10}$$

(Sigue →)

(Continuación)

$$d) \quad \left. \begin{array}{l} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{array} \right\} \quad \text{Cambio de variable} \left\{ \begin{array}{l} 2u - 3v = 7 \\ \log x = u; \quad \log y = v \\ u + v = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2u - 3v = 7 \\ -2u - 2v = -2 \end{array} \right\} \quad v = -1; \quad u = 2$$
$$\underline{-5v = 5}$$

Se deshace el cambio: $\log x = u = 2$; $\log y = v = -1$; $x = 100$; $y = 10^{-1}$

$$e) \quad \left. \begin{array}{l} \log x + 5\log y = 7 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \log x + 5\log y = 7 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \log x + 5\log y = 7 \\ \xrightarrow{(-1)} -\log x + \log y = -1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \log x + 5\log y = 7 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}} \right\}$$
$$\underline{6\log y = 6}$$

Si $\log y = 1 \Rightarrow y = 10$; sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación:

$$\log x + 5\log 10 = 7; \quad \log x + 5 \cdot 1 = 7; \quad \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

La comprobación es inmediata.

$$f) \quad \left. \begin{array}{l} 2\log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2\log x + \log y = 5 \\ \log x + \log y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow 2\log x + \log y = 5 \\ \xrightarrow{(-1)} -\log x - \log y = -4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2\log x + \log y = 5 \\ \log x + \log y = 4 \end{array}} \right\}$$
$$\underline{\log x = 1}$$

Si $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$; sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación:

$$2\log 10 + \log y = 5; \quad 2 \cdot 1 + \log y = 5; \quad \log y = 3 \Rightarrow y = 1000$$

La comprobación es inmediata.

$$g) \quad \left. \begin{array}{l} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{array} \right\} \quad \text{Cambio de variable} \left\{ \begin{array}{l} 2^x = u; \quad 5^y = v \end{array} \right\}$$
$$\left. \begin{array}{l} u + v = 9 \\ 4u + 5v = 41 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x(-5)} -5u - 5v = -45 \\ \longrightarrow 4u + 5v = 41 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} u + v = 9 \\ 4u + 5v = 41 \end{array}} \right\} \quad u = 4; \quad v = 5$$
$$\underline{-u = -4}$$

(Sigue →)

$$\text{Se deshace el cambio: } \left. \begin{array}{l} 2^x = u = 4 = 2^2 \\ 5^y = v = 5 = 5^1 \end{array} \right\} \boxed{x = 2; \quad y = 1}$$

$$\text{Comprobación: } \left. \begin{array}{l} 2^4 + 5^2 = 41 \\ 2^2 + 5^1 = 9 \end{array} \right\}$$

$$h) \quad \left. \begin{array}{l} 2^x - 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 712 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2^x - 3^{-1} \cdot 3^y = 5 \\ \rightarrow 2^1 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^y = 712 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 2^x = u; \quad 3^y = v \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} u - \frac{v}{3} = 5 \\ 2u + 8v = 712 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} u - \frac{v}{3} = 5 \\ u = \frac{712 - 8v}{2} = 356 - 4v \end{array} \right\}$$

$$356 - 4v - \frac{v}{3} = 5; \quad 351 = \frac{13v}{3}; \quad \boxed{v = 81; \quad u = 32}$$

$$\text{Se deshace el cambio: } \left. \begin{array}{l} 2^x = u = 32 = 2^5 \\ 3^y = v = 81 = 3^4 \end{array} \right\} \boxed{x = 5; \quad y = 4}$$

$$i) \quad \left. \begin{array}{l} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^y = -9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 2^x = u; \quad 5^y = v \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} u + v = 9 \\ 4u - 5v = -9 \end{array} \right\} \xrightarrow{x5} \left. \begin{array}{l} 5u + 5v = 45 \\ 4u - 5v = -9 \end{array} \right\} \rightarrow u = 4; \quad v = 5$$

$$9u = 36$$

$$\text{Se deshace el cambio: } \left. \begin{array}{l} 2^x = u = 4 \\ 5^y = v = 5 \end{array} \right\} \boxed{x = 2; \quad y = 1}$$